Metoda Newton-Raphson

Metoda Newton-Raphson este una dintre cele mai performante metode folosite în prezent pentru calculul regimului permanent al rețelelor electrice. Ea este implementată în cele mai cunoscute pachete de programe pentru analiza funcționării rețelelor electrice, precum EDSA, Neplan, ETAP, DIGSilent Power Factory. (Fig. NR.1).

Avantajele metodei:

- Convergență rapidă (pătratică, adică eroarea în iterația *(t+1)* este egală sau mai mică cu rădăcina pătrată a erorii din iterația *(t)*)
- Precizia rezultatelor

Dezavantajele metodei:

Metoda Newton-Raphson poate avea probleme de convergență în situația în care:

- Aproximația inițială nu este aleasă corespunzător. Pentru asigurarea convergenței, aproximația inițială a soluțiilor trebuie aleasă în apropierea soluției exacte.
- Regimul de funcționare al rețelei este unul special, apropiat de limita stabilității statice sau cu încărcări profund dezechilibrate în diverse zone.
- Numărul mare de calcule efectuat într-o iterație.

În continuare, se prezintă suportul matematic general şi apoi particularizarea metodei Newton-Raphson pentru calculul regimului permanent al rețelelor electrice.

Modelul matematic general al metodei

(acest model matematic a fost studiat şi în anul II, la disciplina Metode Numerice)

Ca şi în cazul metodei Seidel-Gauss, metoda Newton-Raphson este bazată pe o metodă generală numerică. Este vorba despre metoda Newton de rezolvare a ecuațiilor neliniare de o singură variabilă

$$f(x) = 0 \tag{NR.1}$$

Dacă:

(a) se cunoaşte o aproximație inițială $x^{(t)}$ a necunoscutei ce se doreşte a fi calculată, *cât mai apropiată de soluția exactă* x^*, şi se notează cu Δx eroarea aproximației curente față de ea :

$$x^* = x^{(t)} + \Delta x \tag{NR.2}$$

(b) se cunoaşte din trigonometrie că derivata unei funcții (variația funcției *y(x)* înregistrată la o anumită variație a valorii variabilei *x*) este panta tangentei în punctul respectiv la curba funcției (vezi şi Fig. NR.2):

$$f'(x^{(t)}) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x^{(t)}) - 0}{x^{(t)} - x^{(t+1)}} \tag{NR.3}$$

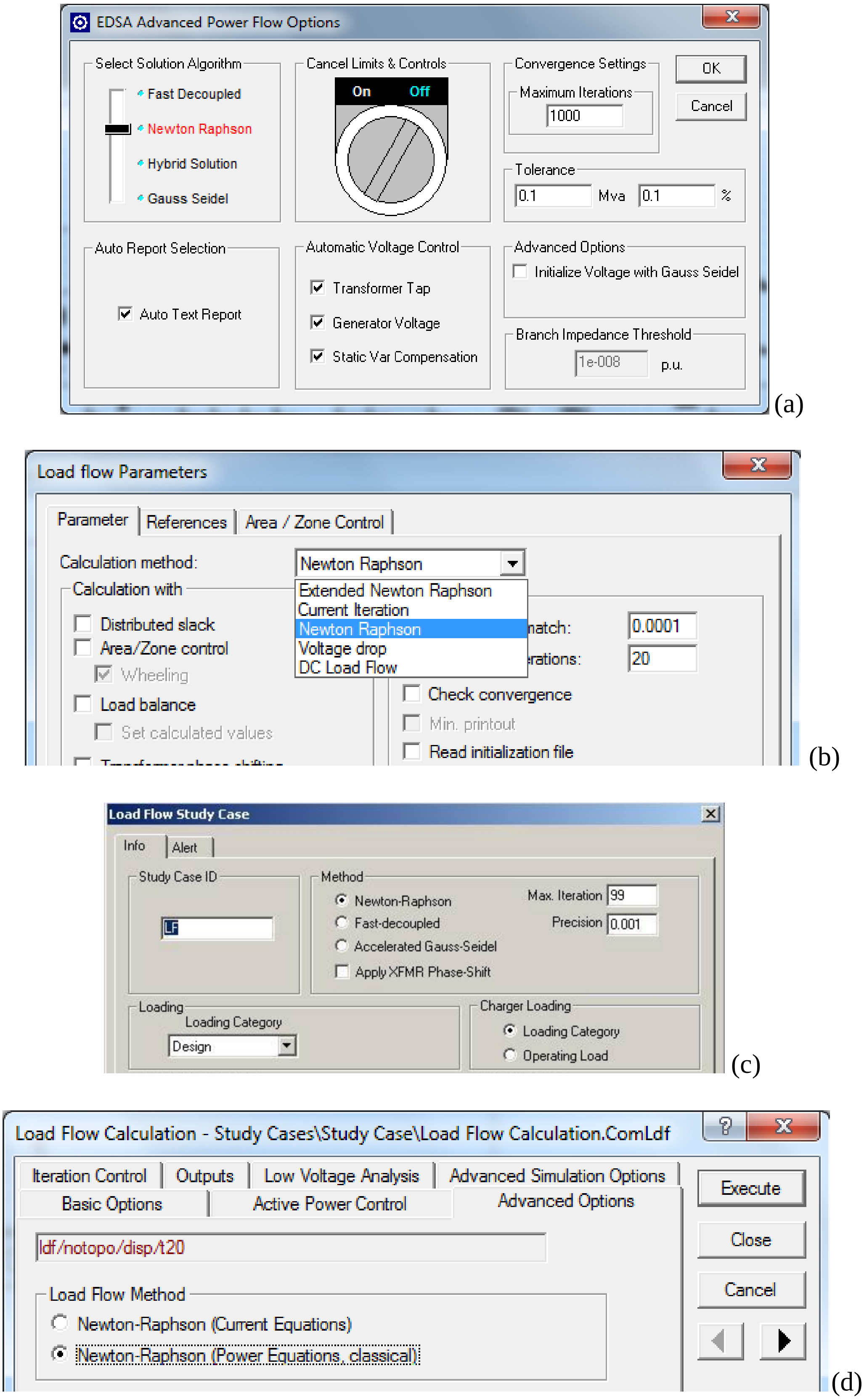

Fig. SG.1 - Metoda Newton-Raphson folosită pentru calculul regimului permanent al reţelelor electrice în programele EDSA (a), Neplan (b), ETAP (c) şi DIGSilent Power Factory (d)

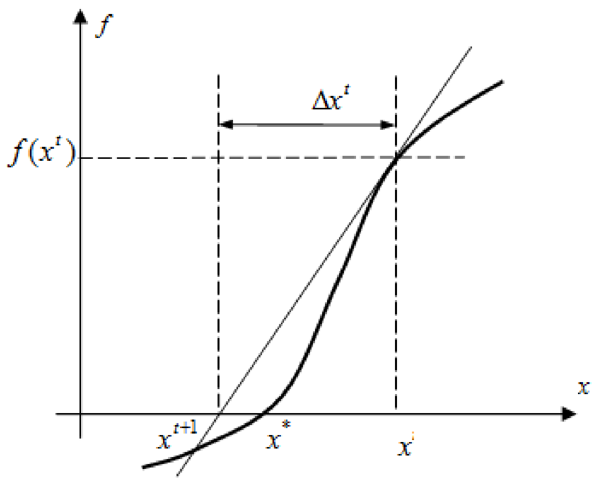

Fig. NR.2 – Principiul matematic al formulei de iterare Newton-Raphson

atunci aproximația următoare a necunoscutei *x* rezultă imediat:

$$x^{(t+1)} = x^{(t)} + \Delta x = x^{(t)} - \frac{f(x^{(t)})}{f'(x^{(t)})} \qquad \text{(NR.4)}$$

Ca şi în cazul metodei Seidel-Gauss, procesul este iterativ. Se calculează o serie de corecții succesive Δx care se aplică aproximației inițiale a necunoscutei, până la atingerea unui criteriu de oprire impus (de obicei, până ce diferența dintre două aproximații succesive scade sub un anumit prag).

Generalizarea acestei metode pentru sisteme de ecuații neliniare poate fi descrisă mai uşor dacă se apelează la notația matriceală

$$\Im([x]) = 0 \qquad \text{(NR.5)}$$

în care sa-u notat cu $[x] = [x_1\ x_2\ \ldots x_n]^T$ vectorul necunoscutelor şi cu $\Im = [f_1\ f_2\ \ldots\ f_n]^T$ vectorul cu valorile celor *n* funcții ce definesc sistemul de ecuații, calculate în punctul $[x]$.

Ecuațiile (NR.2) - (NR.4) se rescriu:

$$\Im([x^*]) = \Im([x]^t + [\Delta x]^t) \approx \Im([x]^t) + J([x]^t) \cdot [\Delta x]^t \qquad \text{(NR.7)}$$

şi

$$[x]^{t+1} = [x]^t + [\Delta x]^t = [x]^t - J^{-1}([x]^t) \cdot \Im([x]^t) \qquad \text{(NR.8)}$$

$J([x]) \overset{not}{=} J$ este o matrice pătrată de rang *n* numită *matrice Jacobian*, care conține derivatele funcțiilor *f* în raport cu necunoscutele *x*. Forma matricei Jacobian este:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad \text{(NR.9)}$$

în care un termen generic $J_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ reprezintă derivata funcției f_i în raport cu variabila x_k.

Practic, are loc liniarizarea problemei. În fiecare iterație, din formula

$$J([x]^t) \cdot [\Delta x]^t = \Im([x]^t) \qquad \text{(NR.10)}$$

se calculează corecția necunoscutelor problemei în iterația curentă.

Implementarea metodei Newton-Raphson pentru calculul regimului permanent al rețelelor electrice

Cea mai răspândită implementare a metodei Newton-Raphson pentru calculul regimului permanent consideră modelul neliniar al bilanțului de puteri în noduri, care utilizează pentru admitanțe reprezentarea algebrică, iar pentru tensiuni, reprezentarea geometrică.

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{ik} &= G_{ik} + j \cdot B_{ik} \\ \underline{U}_i &= U_i \cdot e^{j\theta_i} \end{aligned} \qquad \text{(NR.11)}$$

Pentru un sistem cu *N* noduri independente, în care nodul de echilibru este notat cu *e*, puterea aparentă asociată unui nod oarecare i are expresia de calcul:

$$\underline{S}_i = P_i + j \cdot Q_i = \underline{U}_i \cdot \underline{J}_i^* = \underline{U}_i \cdot \sum_{k=1}^{N} \underline{Y}_{ik}^* \cdot \underline{U}_k^*, \quad i = 1..N, i \neq e \qquad \text{(NR.12)}$$

Folosind expresiile (NR.11) şi separând părţile reală şi imaginară ale puterii (activă şi reactivă), rezultă:

$$\begin{aligned} P_i &= G_{ii} \cdot U_i^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} U_i \cdot U_k \cdot [G_{ik} \cdot \cos(\theta_i - \theta_k) + B_{ik} \cdot \sin(\theta_i - \theta_k)] \\ Q_i &= -B_{ii} \cdot U_i^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} U_i \cdot U_k \cdot [B_{ik} \cdot \cos(\theta_i - \theta_k) - G_{ik} \cdot \sin(\theta_i - \theta_k)] \\ & \qquad i = 1..N, i \neq e \end{aligned} \qquad \text{(NR.13)}$$

Dacă se cunoaşte o aproximație inițială a tensiunilor nodale complexe, puterile active şi reactive nodale, calculate cu relațiile (NR.13) în ipoteza în care toate nodurile din rețea ar fi de tip PQ, se vor abate de la valorile impuse P_i^{imp} şi Q_i^{imp} (sarcinile cunoscute din noduri) cu cantitățile ΔP_i, respectiv ΔQ_i.

$$\begin{aligned}\Delta P_i &= P_i^{imp} - P_i^{calc}\\ \Delta Q_i &= Q_i^{imp} - Q_i^{calc}\end{aligned} \qquad \text{(NR.14)}$$

Dacă aproximația curentă a tensiunilor ar fi tocmai soluția exactă pentru tensiuni, aceste abateri ar trebui să fie nule, puterile calculate rezultând egale cu puterile precizate ca date de intrare. În realitate, pentru aproximații ale soluțiilor exacte, ele sunt, în general, nenule. Pentru compensarea acestor abateri, modulele şi argumentele tensiunilor nodale trebuie corectate. Abaterile ΔP_i şi ΔQ_i se pot scrie:

$$\begin{aligned}\Delta P_i &= \sum_{k=1}^{N}\left[\frac{\partial P_i}{\partial \theta_k}\cdot\Delta\theta_k + \frac{\partial P_i}{\partial U_k}\cdot U_k\cdot\frac{\Delta U_k}{U_k}\right]\\ \Delta Q_i &= \sum_{k=1}^{N}\left[\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_k}\cdot\Delta\theta_k + \frac{\partial Q_i}{\partial U_k}\cdot U_k\cdot\frac{\Delta U_k}{U_k}\right]\end{aligned} \qquad i=1..N, i\neq e \qquad \text{(NR.15)}$$

Pentru simplificarea ulterioară a calculelor, corecțiile tensiunilor ΔU_k se înlocuiesc cu $\Delta U_k / U_k$, iar sistemul (NR.15) se rescrie:

$$\begin{aligned}\Delta P_i &= H_{ii}\cdot\Delta\theta_i + N_{ii}\cdot\frac{\Delta U_i}{U_i} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N}\left(H_{ik}\cdot\Delta\theta_k + N_{ik}\cdot\frac{\Delta U_k}{U_k}\right)\\ \Delta Q_i &= J_{ii}\cdot\Delta\theta_i + L_{ii}\cdot\frac{\Delta U_i}{U_i} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N}\left(J_{ik}\cdot\Delta\theta_k + L_{ik}\cdot\frac{\Delta U_k}{U_k}\right)\end{aligned} \qquad \begin{aligned}&i=1..N,\\ &i\neq e\end{aligned} \qquad \text{(NR.16)}$$

sau, sub formă matriceală:

$$\left[\begin{array}{cc|c|cc|c|cc}
H_{11} & N_{11} & \cdots & H_{1k} & N_{1k} & \cdots & H_{1N} & N_{1N}\\
J_{11} & L_{11} & & J_{1k} & L_{1k} & & J_{1N} & L_{1N}\\ \hline
\cdots & & & \cdots & & & \cdots & \\ \hline
H_{i1} & N_{i1} & \cdots & H_{ik} & N_{ik} & \cdots & H_{iN} & N_{iN}\\
J_{i1} & L_{i1} & & J_{ik} & L_{ik} & & J_{iN} & L_{iN}\\ \hline
\cdots & & & \cdots & & & \cdots & \\ \hline
H_{N1} & N_{N1} & \cdots & H_{Nk} & N_{Nk} & \cdots & H_{NN} & N_{NN}\\
J_{N1} & L_{N1} & & J_{Nk} & L_{Nk} & & J_{NN} & L_{NN}
\end{array}\right] * \left[\begin{array}{c}\Delta\theta_1\\ \Delta U_1/U_1\\ \hline \cdots \\ \hline \Delta\theta_i\\ \Delta U_i/U_i\\ \hline \cdots\\ \hline \Delta\theta_N\\ \Delta U_N/U_N\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\Delta P_1\\ \Delta Q_1\\ \hline \cdots \\ \hline \Delta P_i\\ \Delta Q_i\\ \hline \cdots\\ \hline \Delta P_N\\ \Delta Q_N\end{array}\right] \qquad \text{(NR.17)}$$

Relațiile (NR.16) şi (NR.17) descriu un sistem de ecuații liniare cu *2*(N-1)* necunoscute, corecțiile pentru modulul ($\Delta U_k / U_k$) şi argumentul tensiunilor ($\Delta\theta_k$). Termenii *H, J, L* şi *N* din sistemul (NR.17) formează matricea jacobian. Dacă rețeaua conține şi noduri PU, jacobianul, respectiv sistemul de ecuații (NR.17) îşi vor reduce dimensiunile. Pentru nodurile PU, vor dispărea liniile corespunzătoare termenilor de tipul J_{ik} şi L_{ik}, termenul liber nu va conține abaterile de putere reactivă ΔQ_i, şi se vor calcula numai corecțiile de argument $\Delta\theta_i$.

Relațiile de calcul ale elementelor matricei jacobian sunt:

$$H_{ii} = \frac{\partial P_i}{\partial \theta_i} = -\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} U_i \cdot U_k \cdot \left[G_{ik} \cdot \sin(\theta_i - \theta_k) - B_{ik} \cdot \cos(\theta_i - \theta_k) \right] = -B_{ii} \cdot U_i^2 - Q_i$$

$$H_{ik} = \frac{\partial P_i}{\partial \theta_k} = U_i \cdot U_k \cdot \left[G_{ik} \cdot \sin(\theta_i - \theta_k) - B_{ik} \cdot \cos(\theta_i - \theta_k) \right]$$

$$N_{ii} = \frac{\partial P_i}{\partial U_i} \cdot U_i = \left[2 \cdot G_{ii} \cdot U_i - \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} U_k \cdot \left[G_{ik} \cdot \cos(\theta_i - \theta_k) + B_{ik} \cdot \sin(\theta_i - \theta_k) \right] \right] \cdot U_i =$$

$$= P_i + G_{ii} \cdot U_i^2$$

$$N_{ik} = \frac{\partial P_i}{\partial U_k} \cdot U_k = U_i \cdot U_k \cdot \left[G_{ik} \cdot \cos(\theta_i - \theta_k) + B_{ik} \cdot \sin(\theta_i - \theta_k) \right]$$

$$J_{ii} = \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i} = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} U_i \cdot U_k \cdot \left[B_{ik} \cdot \sin(\theta_i - \theta_k) + G_{ik} \cdot \cos(\theta_i - \theta_k) \right] = P_i - G_{ii} \cdot U_i^2 \qquad \text{(NR.17)}$$

$$J_{ik} = \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_k} = -U_i \cdot U_k \cdot \left[B_{ik} \cdot \sin(\theta_i - \theta_k) + G_{ik} \cdot \cos(\theta_i - \theta_k) \right] = -N_{ik}$$

$$L_{ii} = \frac{\partial Q_i}{\partial U_i} \cdot U_i = -\left[2 \cdot B_{ii} \cdot U_i + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} U_k \cdot \left[B_{ik} \cdot \cos(\theta_i - \theta_k) - G_{ik} \cdot \sin(\theta_i - \theta_k) \right] \right] \cdot U_i =$$

$$= Q_i - B_{ii} \cdot U_i^2$$

$$L_{ik} = \frac{\partial Q_i}{\partial U_k} = -U_i \cdot U_k \cdot \left[B_{ik} \cdot \cos(\theta_i - \theta_k - G_{ik} \cdot \sin(\theta_i - \theta_k) \right] = H_{ik}$$

Prin rezolvarea sistemului de ecuații (NR.17), se determină corecțiile pentru modulele şi argumentele tensiunilor nodale şi se actualizează aproximațiile necunoscutelor:

$$\begin{aligned} U_i^{t+1} &= U_i^t + \Delta U_i^t & \quad i &\equiv PQ \\ \theta_i^{t+1} &= \theta_i^t + \Delta\theta_i^t & \quad i &\equiv PQ \cup PU \end{aligned} \qquad \text{(NR.18)}$$

Procesul iterativ continuă prin recalcularea jacobianului şi determinarea unor noi corecţii ale modulelor şi argumentelor tensiunii, până la îndeplinirea unui criteriu de oprire. Un asemenea criteriu este coborârea abaterilor maxime ale puterilor nodale sub o limită admisibilă.

Algoritmul de principiu al metodei Newton-Raphson.

1. Introducerea datelor de intrare;
2. Stabilirea aproximaţiei iniţiale pentru tensiunile nodale $\underline{U}_{i(0)}$, $i=1..N,\ i \neq e$ şi iniţializarea procesului iterativ ($it=0$);
3. Pentru toate nodurile independente, mai puţin cele de echilibru: $i=1..N,\ i \neq e$:
   - 3.1. Se calculează injecţiile de putere activă şi reactivă în iteraţia curentă, P_i şi Q_i
   - 3.2. Se calculează abaterile pentru puterea activă $\Delta P_i = P_i^{imp} - P_i$
   - 3.3. Tratarea nodurilor de tip PU. Dacă nodul *i* este de tip PU:
     - 3.3.1. Dacă $Q_i \prec Q_i^{\min}$, nodul *i* se transformă temporar în nod de tip PQ, pentru care $Q_i^{imp} = Q_i^{\min}$ şi se trece la pasul 3.3.4;
     - 3.3.2. Dacă $Q_i \succ Q_i^{\max}$, nodul *i* se transformă temporar în nod de tip PQ, pentru care $Q_i^{imp} = Q_i^{\max}$ şi se trece la pasul 3.3.4;
     - 3.3.3. Dacă $Q_i^{\min} \prec Q_i \prec Q_i^{\max}$, nodul *i* se păstrează ca nod de tip PU şi se trece la pasul 3.5;
     - 3.3.4. Sistemul de ecuaţii liniare se actualizează cu o ecuaţie corespunzătoare corecţiei pentru puterea reactivă şi se trece la pasul 3.4;
   - 3.4. Se calculează abaterea pentru puterea reactivă $\Delta Q_i = Q_i^{imp} - Q_i$;
   - 3.5. Se trece la următorul nod *i* şi se revine la pasul 3.1, până la epuizarea tuturor nodurilor.
4. Criteriul de oprire. Dacă abaterile maxime pentru puterea activă (în toate nodurile) şi puterea reactivă (în nodurile de tip PQ) se înscriu sub limitele admisibile: $\max\limits_{i \in PQ,PU}(\Delta P_i) \prec \varepsilon_p$ şi $\max\limits_{i \in PQ}(\Delta Q_i) \prec \varepsilon_Q$, se trece la pasul 8;
5. Calculul jacobianului şi rezolvarea sistemului de ecuaţii liniare (NR.17), pentru determinarea corecţiilor $\Delta U_k / U_k$ şi $\Delta \theta_k$;
6. Determinarea noii aproximaţii pentru tensiunile nodale;
7. Verificarea numărului de iteraţii efectuate:
   - Dacă $it = IT_{max}$, procesul de calcul se întrerupe cu afişarea mesajului "Depăşire număr maxim de iteraţii"
   - Dacă $it < IT_{max}$, se trece la o nouă iteraţie şi se revine la pasul 3:
8. Calculul circulaţiilor de puteri pe laturi şi al mărimilor de stare auxiliare

Ţinând cont de anumite ipoteze simplificatoare ce pot fi adoptate în funcţie de condiţiile reale de funcţionare ale reţelelor electrice, s-au dezvoltat variante simplificate ale metodei Newton-Raphson:

- Metoda Newton decuplată
- Metoda Newton decuplată rapidă

Însă, deşi aceste metode reduc numărul de calcule necesar pentru o iteraţie, sporind viteza metodei, dezavantajele ipotezelor simplificatoare adoptate în acest scop este creşterea numărului de iteraţii şi imprecizia rezultatelor obţinute.

Metoda Newton-Raphson decuplată

Ținând cont de faptul că în majoritatea sistemelor electroenergetice există o corelație slabă între variabilele P şi U pe de o parte, respectiv Q şi θ pe de altă parte, ceea ce este echivalent cu valori mici ale derivatelor $\partial P/\partial U$ şi $\partial Q/\partial \theta$, se poate proceda la decuplarea sistemului de ecuații (NR.16) prin neglijarea acestor derivate. În aceste condiții, componentele N şi J din matricea jacobian se anulează şi sistemul (NR.16) se reduce la:

$$\Delta P_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} H_{ik} \cdot \Delta\theta_k \qquad \boldsymbol{i = 1..N,}$$
$$\Delta Q_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} L_{ik} \cdot \frac{\Delta U_k}{U_k} \qquad \boldsymbol{i \neq e} \qquad \text{(NR.19)}$$

Aceasta este echivalent cu decuplarea efectivă a sistemului (NR.16) două sisteme de ecuații distincte, fiecare cu N-1 ecuații şi N-1 variabile (corecții ale modulelor tensiunilor nodale, respectiv corecții pentru argumentele tensiunilor nodale).

În aceste sisteme, coeficienții H_{ik} şi L_{ik} ai jacobianului se calculează cu expresiile lor complete din relațiile (NR.17). Pentru sporirea vitezei de convergență a metodei simplificate, mai întâi este rezolvat sistemul *P-θ,* determinându-se corecțiile de argument ale tensiunii, care sunt folosite ulterior pentru rezolvarea sistemului *Q-U*, din care se calculează corecțiile modulului tensiunii.

Restul paşilor din algoritmul metodei Newton-Raphson complete prezentat mai sus rămân neschimbaţi.

Metoda Newton-Raphson decuplată rapidă

Expresiile (NR.19) pot fi simplificate şi mai mult, dacă se adiptă următoarele ipoteze de calcul:

- $\theta_i - \theta_k \approx 0$, deoarece diferența de fază între tensiunile a două noduri învecinate este neglijabilă . În aceste condiții, în relația (NR.19):

$$\sin(\theta_i - \theta_k) \approx 0 \qquad \cos(\theta_i - \theta_k) \approx 1 \qquad \text{(NR.20)}$$

- $G_{ik} << B_{ik}$, deoarece conductanțele laturilor au în general valori mult mai mici decât susceptanțele acestora, şi atunci

$$G_{ik} = 0 \qquad \text{(NR.21)}$$

- În coeficienţii H_{ii} şi L_{ii} din matricea jacobian, se consideră $Q_i << B_{ii} \cdot U_i^2$, aşadar

$$Q_i = 0 \qquad \text{(NR.22)}$$

După adoptarea acestor ipoteze, ținând cont de decuplarea sistemelor de ecuații *P-θ* şi *Q-U* equations, the *H*, *N*, *L* and *J* coefficients from the Jacobian matrix are computed as:

$$H_{ii} = L_{ii} \approx -B_{ii} \cdot U_i^2 \qquad N_{ii} = J_{ii} \approx 0$$
$$H_{ik} = L_{ik} \approx -B_{ik} \cdot U_i \cdot U_k \qquad N_{ik} = J_{ik} \approx 0 \qquad \text{(NR.23)}$$

Coeficienții B_{ik} sunt simplificați în continuare, după cum urmează:

- În ecuațiile *P-θ* equations, sunt eliminate din elementele B_{ik} toate laturile care pot influnța nivelul de tensiune (de exemplu, ploturile transformatoarelor) şi circulațiile de putere reactivă (de exemplu, bobine de reactanță sau baterii de condensatoare) iar modulele tensiunilor sunt considerate egale cu tensiunea nominală îna cel nod $U_{k,n}$. Pe restul laturilor, se neglijează componentele reale ale impedanțelor şi admitanțelor (R şi G). Astfel, în ecuațiile *P-θ,*:

$$B_{ik}^{'} \overset{not}{=} -B_{ik} \cdot U_{k,n} \tag{NR.24}$$

- În ecuațiile *Q-U,* se elimină toate laturile ce ar putea influența circulațiile de putere activă. Astfel:

$$B_{ik}^{''} \overset{not}{=} -B_{ik} \tag{NR.25}$$

Cu aceste simplificări, sistemul (NR.19) se rescrie:

$$\begin{aligned} \Delta P_i &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} B_{ik}^{'} \cdot \Delta\theta_k \\ \Delta Q_i &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} B_{ik}^{''} \cdot \Delta U_k \end{aligned} \tag{NR.26}$$

În relațiile (NR.26), coeficienții $B_{ik}^{'}$ şi $B_{ik}^{''}$ sunt constanți, ceea ce înseamnă că matricea jacobian nu se modifică pe parcursul procesului iterativ, atâta timp cât nici un nod PU nu este transformat temporar în nod PQ. În acest caz, se schimbă numărul ecuațiilor ΔQ_i şi jacobianul trebuie recalculat.