Metoda Seidel-Gauss

Metoda Seidel-Gauss este una dintre primele metode de calcul al regimului permanent, dezvoltată în anii 1950, împreună cu metoda Jacobi. Algoritmul ei foarte simplu şi totodată precis o face utilizabilă pe stații de lucru cu putere redusă de calcul. De aceea, metoda este prezentă în pachete de programe specializate pentru analiza funcționării rețelelor electrice, cum ar fi EDSA (Fig. SG.1), ca algoritm de sine stătător sau ca metodă de pornire pentru algoritmul Newton-Raphson.

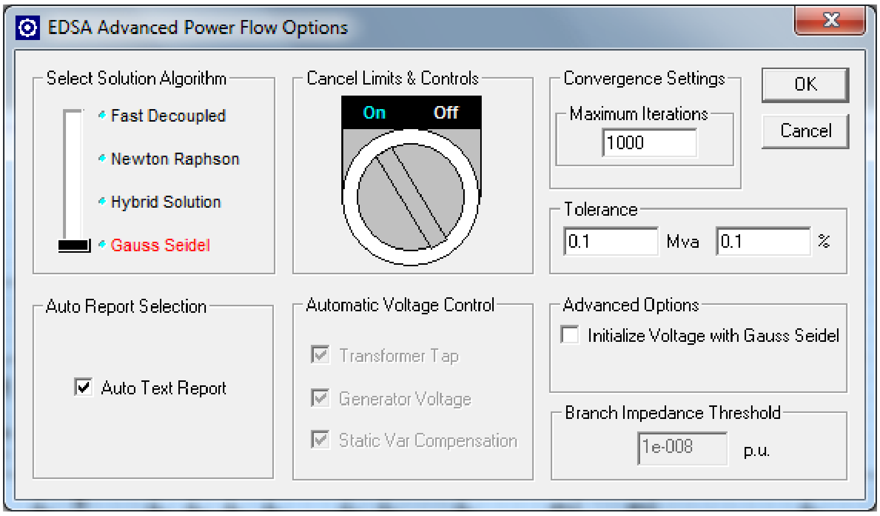

Fig. SG.1 - Metoda Seidel-Gauss folosită pentru calculul regimului permanent al rețelelor electrice în programul EDSA

Avantajele metodei:

- algoritm simplu, scurt şi uşor de implementat în orice mediu de programare
- convergență în unele regimuri extreme de încărcare, situate la limita stabilității sistemului, sau la alegerea unei aproximații inițiale depărtate de soluția exactă, cazuri în care metoda Newton-Raphson este divergentă

Dezavantajele metodei:

- număr mare de iterații, comparativ cu metoda Newton-Raphson; numărul iterațiilor creşte pe măsură ce dimensiunea rețelei analizate creşte
- în principiu, precizia rezultatelor obținute cu metoda Seidel-Gauss este consideată puțin mai slabă, comparativ cu metoda Newton-Raphson

Modelul matematic general al metodei

(acest model matematic a fost studiat şi în anul II, la disciplina Metode Numerice)

Metoda Seidel-Gauss pentru calculul regimului permanent al rețelelor electrice a fost dezvoltată pe baza metodei omonime de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare. În continuare, se prezintă pe scurt modelul matematic de principiu al acesteia, urmând să se facă particularizarea pentru cazul rețelelor electrice.

Pentru un sistem de ecuații liniare de rang n (cu n ecuații şi n necunoscute), scris sub forma generală

$$\begin{aligned} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n &= b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots & \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \ldots + a_{nn}\cdot x_n &= b_n \end{aligned} \qquad \text{(SG.1),}$$

care se rescrie matriceal

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad \text{(SG.2)}$$

şi în formă compactă

$$[A]\cdot[x]=[b], \qquad \text{(SG.3)}$$

dacă se defineşte desfacerea matricei $[A]$ în două matrice:

$$[A]=[N]-[P], \qquad \text{(SG.4)}$$

atunci sistemul (SG.3) capătă forma:

$$[N]\cdot[x]=[P]\cdot[x]+[b] \qquad \text{(SG.5)}$$

Pe baza relației (SG.5) se defineşte relația generică de recurență pentru iterația t:

$$[N]\cdot[x]^{t+1}=[P]\cdot[x]^{t}+[b] \qquad \text{(SG.6)}$$

Astfel, aproximația necunoscutelor din iterația *(t+1)* se poate calcula în funcție de aproximația necunoscutelor de la iterația *(t)* cu formula:

$$[x]^{t+1}=[N]^{-1}\cdot[P]\cdot[x]^{t}+[N]^{-1}\cdot[b] \qquad \text{(SG.7)}$$

Pornind de la o aproximație inițială $[x]^0$, se recalculează pe baza relației (SG.7), într-un proces iterativ, un şir de aproximații succesive $[x]^1$, $[x]^2$, $[x]^3$, … care, în anumite condiții, este convergent către soluția exactă căutată.

În general, matricele $[N]$ şi $[P]$ din relaţia (SG.4) se definesc în funcţie de *desfacerea standard*:

$$[A]=[L]+[D]+[R] \tag{SG.8}$$

urmărindu-se ca matricea $[N]$ – care, conform relaţiei (SG.7), ar trebui inversată – să aibă o formă cât mai simplă.

În relaţia (SG.8), *[L]* (left) este o matrice inferior triunghiulară şi are elemente nenule toate elementele de sub diagonala principală a matricei coeficienţilor *[A]*, *[D]* este o matrice diagonală, cu elemente nenule doar pe diagonala principală, egale cu elementele diagonale ale matricei *[A]* şi *[R]* (right) este o matrice superior triunghiulară şi are elemente nenule toate elementele de deasupra diagonalei principale a matricei coeficienţilor *[A]*.

Pentru metoda Seidel – Gauss, matricele $[N]$ şi $[P]$ şi formula de recurenţă au forma:

$$[N]=[D]+[L] \quad \text{şi} \quad [P]=-[R] \tag{SG.9}$$

În aceste condiţii, relaţia (SG.6) se rescrie:

$$([D]+[L])\cdot[x]^{t+1}=[b]-[R]\cdot[x]^{t} \tag{SG.10}$$

Relaţia (SG.10) se rescrie pentru o singură necunoscută:

$$x_i^{t+1}=\frac{b_i}{a_{ii}}-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\cdot x_j^{t+1}-\sum_{j=i+1}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\cdot x_j^{t} \qquad i=1,\dots,n \tag{SG.11}$$

Varianta modificată a metodei Seidel – Gauss foloseşte o procedură de accelerare care calculează mai întâi aproximaţia x_i^{t+1} cu formula metodei Seidel – Gauss standard, după care aplică acesteia o corecţie de forma:

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &\leftarrow x_i^{t+1}+\omega_1\cdot(x_i^{t+1}-x_i^{t}) \\ x_i^{t+1} &\leftarrow x_i^{t}+\omega_2\cdot(x_i^{t+1}-x_i^{t}) \end{aligned} \tag{SG.12}$$

unde ω_1 şi ω_2 se numesc *factori de accelerare*.

Condiţiile de convergenţă necesare metodei corespund unei matrice de coeficienţi $[A]$ care este *diagonal dominantă*, adică:

$$|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{i-1}|a_{ij}| \qquad |a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{i-1}|a_{ji}| \tag{SG. 13}$$

În practică, însă, controlul convergenţei se face prin impunerea unui criteriu de oprire calitativ (de exemplu, abaterea absolută între două aproximaţii succesive) sau cantitativ (de exemplu, precizarea unui număr maxim de iteraţii).

Metoda Seidel-Gauss pentru calculul regimului permanent al rețelelor electrice

Pentru adaptarea metodei Seidel-Gauss generale la cazul particular al rețelelor electrice, se pleacă de la ecuația nodală matriceală între matricea admitanțelor nodale $[\underline{Y}_n]$, vectorul tensiunilor nodale $[\underline{U}_n]$ și vectorul curenților nodali $[\underline{J}_n]$, ce paote fi asimilată cu expresia generală (SG.3)

$$[\underline{Y}_n]\cdot[\underline{U}_n]=[\underline{J}_n] \tag{SG.14}$$

Din această ecuație, poate fi scrisă expresia curentului într-un nod oarecare i:

$$\underline{J}_i=\underline{Y}_{ii}\cdot\underline{U}_i-\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\underline{Y}_{ik}\cdot\underline{U}_k \qquad i=1,\ldots,N;\ \ i\neq e \tag{SG.15}$$

În general, pentru calculul regimului permanent, sarcinile nodale sunt disponibile sub formă de puteri active și reactive. Curentul nodal poate fi explicitat în funcție de puterea aparentă nodală și tensiunea nodală cu relația:

$$\underline{J}_i=\frac{\underline{S}_i^*}{\underline{U}_i^*}=\frac{P_i-j\cdot Q_i}{\underline{U}_i^*} \qquad i=1,\ldots,N;\ \ i\neq e \tag{SG.16}$$

Ținând cont de relația (SG.16), din expresia (SG.15) rezultă tensiunea nodală $\underline{U}_i$:

$$\underline{U}_i=\frac{1}{\underline{Y}_{ii}}\cdot\left(\frac{P_i-j\cdot Q_i}{\underline{U}_i^*}+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N}\underline{Y}_{ik}\cdot\underline{U}_k\right) \qquad i=1,\ldots,N;\ \ i\neq e \tag{SG.17}$$

Ținând cont de relațiile (SG.3), (SG.11) și (SG.14), din formula (SG.17) rezultă formula de iterare a metodei Seidel-Gauss pentru calculul regimului permanent al rețelelor electrice:

$$\underline{U}_i^{t+1}=\frac{1}{\underline{Y}_{ii}}\cdot\left(\frac{P_i-j\cdot Q_i^{t+1}}{(\underline{U}_i^t)^*}+\sum_{k=1}^{i-1}\underline{Y}_{ik}\cdot\underline{U}_k^{t+1}+\sum_{k=i+1}^{N}\underline{Y}_{ik}\cdot\underline{U}_k^t\right) \qquad \begin{matrix}i=1,\ldots,N\\ i\neq e\end{matrix} \tag{SG.18}$$

Pentru îmbunătățirea vitezei de convergență a metodei, se poate apela la procedeul de accelerare cu ajutorul factorilor ω, analog formulelor (SG.12). *Metoda Seidel-Gauss modificată* corectează tensiunile din iterația curentă în funcție de valorile tensiunilor din iterația anterioară și diferența dintre valorile tensiunilor obținute în două iterații succesive:

$$\underline{U}_i^{t+1}\leftarrow\underline{U}_i^t+\alpha\cdot(\underline{U}_i^{t+1}-\underline{U}_i^t) \tag{SG.19}$$

Factorul de accelerare α ia valori în intervalul [0, 2]. Se recomandă valori între 1.4 și 1.6. O valoare subunitară a factorului α conduce de obicei la încetinirea convergenței.

Drept criterii de oprire a calcului iterativ, se poate folosi una dintre următoarele variante:

- Înscrierea abaterii între injecțiile de putere aparentă în nodul de echilibru în două iterații succesive sub o anumită limită:

$$\Delta S_e = \left| \underline{S}_e^{t+1} - \underline{S}_e^{t} \right| \leq \varepsilon \tag{SG.20}$$

- Înscrierea abaterii maxime a tensiunilor din noduri în două iterații succesive sub o valoare limită:

$$\Delta U_{\max} = \max_{\substack{i=1,\dots,N \\ i \neq e}} \left| \underline{U}_i^{t+1} - \underline{U}_i^{t} \right| \leq \varepsilon \tag{SG.21}$$

- Înscrierea abaterii între tensiunile din noduri în două iterații succesive sub o anumită limită:

$$\left| \underline{U}_i^{t+1} - \underline{U}_i^{t} \right| \leq \varepsilon, \qquad \forall i = 1,\dots,N \tag{SG.22}$$

Algoritmul complet al metodei Seidel-Gauss:

1. Definirea rețelei analizate prin introducerea datelor de intrare (parametri topologici, electrici şi se sarcină).
2. Stabilirea aproximației inițiale a tensiunilor nodale $\underline{U}_i^0$, $i=1..N$, $i \neq e$ şi inițializarea procesului iterativ ($t=0$);
3. Calculul injecției de putere aparentă în nodul de echilibru, la începutul iterației:

$$\underline{S}_e^{init} = U_e \cdot \underline{J}_e^* = U_e^2 \cdot \underline{Y}_{ee}^* - U_e \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq e}}^{N} \underline{Y}_{ek}^* \cdot (\underline{U}_k^0)^*$$

4. Tratarea nodurilor de tip PU (i=1,…, N şi i nod de tip PU).
   4.1. Calculul valorii corectate a potențialelor $\underline{U}_i^0$:

$$\underline{U}_i^{cor} = \frac{U_i^{impus} \cdot \underline{U}_i^0}{U_i^0}$$

   4.2. Calculul injecției de putere reactivă în nod:

$$Q_i^0 = \mathrm{Im}\left(\underline{U}_i^{cor} \cdot \underline{J}_i^*\right) = \mathrm{Im}\left(\left(U_i^{cor}\right)^2 \cdot \underline{Y}_{ii}^* - \underline{U}_i^{cor} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} \underline{Y}_{ik}^* \cdot (\underline{U}_k^0)^* \right)$$

   4.3. Verificarea încadrării puterii reactive nodale între limitele impuse:
   - dacă $Q_i^{min} \leq Q_i^0 \leq Q_i^{max}$, nodul i rămâne nod de tip PU, în calcule folosindu-se valoarea corectată a tensiunii: $\underline{U}_i^0 = \underline{U}_i^{cor}$.
   - dacă $Q_i^0 \leq Q_i^{min}$, nodul i se transformă temporar (în cadrul iterației curente) în nod de tip PQ, pentru care $Q_i^0 = Q_i^{min}$, şi se menține valoarea necorectată a tensiunii $\underline{U}_i^0$.
   - dacă $Q_i^0 > Q_i^{max}$, nodul i se transformă temporar (în cadrul iterației curente) în nod de tip PQ, pentru care $Q_i^0 = Q_i^{max}$, şi se menține valoarea necorectată a tensiunii $\underline{U}_i^0$.
5. Calculul potențialelor nodale din iterația curentă:

$$\underline{U}_i^1 = \frac{1}{\underline{Y}_{ii}} \cdot \left(\frac{P_i - j \cdot Q_i^0}{(\underline{U}_i^0)^*} + \sum_{k=1}^{i-1} \underline{Y}_{ik} \cdot \underline{U}_k^1 + \sum_{k=i+1}^{N} \underline{Y}_{ik} \cdot \underline{U}_k^0 \right) \quad i = 1,\dots,N;\ i \neq e$$

6. Calculul puterii aparente în nodul de echilibru la finalul iterației:

$$\underline{S}_e^{final} = U_e \cdot \underline{J}_e^* = U_e^2 \cdot \underline{Y}_{ee}^* - U_e \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq e}}^{N} \underline{Y}_{ek}^* \cdot (\underline{U}_k^1)^*$$

7. Verificarea condiției de oprire:
   - dacă $|\underline{S}_e^{final} - \underline{S}_e^{init}| \leq \varepsilon$, s-a atins precizia impusă şi se încheie procesul iterativ (salt la pasul 8);
   - în caz contrar, se revine la pasul 4, folosind ca aproximații inițiale ale tensiunilor nodale noile valori calculate ($\underline{U}_i^0 \leftarrow \underline{U}_i^1$) şi ca injecție inițială în nodul de echilibru valoarea nou calculată ($\underline{S}_e^{init} \leftarrow \underline{S}_e^{final}$);
8. Tensiunile nodale sunt cele calculate în ultima iterație $\underline{U}_i^1$, $i = 1,\dots,N$ şi $i \neq e$. Injecția de putere în nodul de echilibru corespunde ultimii valori calculate, $\underline{S}_e^{final}$.
9. Calculul necunoscutelor auxiliare ale regimului permanent (circulații de puteri, pierderi de putere, căderi de tensiune pe laturi etc.)